

扩展三值纠一检二码原理与设计

沈云付, 潘 磊

(上海大学计算机工程与科学学院, 上海大学高性能计算中心, 上海 200444)

摘 要: 本文在三值汉明码一位检错纠错研究工作的基础上, 对三值汉明码的检错纠错方法进行进一步研究. 给出了扩展三值汉明码的形式, 通过对扩展三值汉明码的错误分析获得了一位纠错和二位检错原理, 给出了扩展三值汉明码的纠错码表, 根据纠错码表提出了一位纠错方法, 给出了基于三值光学计算机的扩展三值汉明码检错纠错概念结构图和功能部件, 为检错纠错系统的光学设计提供一种途径.

关键词: 三值光学计算机 (TOC); 三值扩展汉明码; 纠一检二码; 纠错码表

中图分类号: TP302.8 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2013) 08-1615-07

电子学报 URL: <http://www.ejournal.org.cn>

DOI: 10.3969/j.issn.0372-2112.2013.08.026

Principle and Design for Extended Ternary SEC-DEC Code

SHEN Yun-fu, PAN Lei

(School of Computer Engineering and Science, High Performance Computing Center, Shanghai University, Shanghai, 200444, China)

Abstract: In this paper, on the basis of research of 1-bit detecting-correcting for ternary Hamming code, further research is carried out. With the form of extended ternary Hamming code proposed, the principle of Single Error Correction and Double Error Detection is proposed by analysis of the error in extended ternary Hamming code. By the two error-correcting tables presented the method of error correction of ternary Hamming code is obtained. Then the graph of error detection and correction conceptual structure of extended ternary Hamming code and its functional components are put forward in the ternary optical computer. The work provides a new approach for the design of detecting and correcting system optically.

Key words: ternary optical computer (TOC); extended ternary hamming code; single error correction and double error detection (SEC-DED); error-correcting tables

1 引言

MSD (Modified Signed-Digit) 计数表示是由 A. Avizienis^[1]提出来的. 在 MSD 表示中用三个符号来表达数据. 因此任何数 A 都可以表示为 $A = \sum_i a_i 2^i$, 其中 a_i 为 0, 1 或 $\bar{1}$, 这里 $\bar{1}$ 表示 -1 . 一个非 0 数可以有多个 MSD 表示. MSD 加法无进位过程, 因而不存在进位延时问题.

1986 年 Drake 等人将 MSD 表示及加法运算引入到光学领域^[2]. 三值光学计算机 (Ternary Optical Computer, TOC) 是光学计算的一个重要研究领域. TOC 每位有三个物理状态: 无光, 垂直偏振光和水平偏振光, 它们可依任何映射关系解释成三值 0, 1 和 $\bar{1}$, 因此 TOC 使用 MSD 加法器正是相得益彰. 目前, 三值光学计算已成为一个研究热点^[3-6].

自 2000 年起, 金翊等提出了三值光学计算机原理,

开展了以重构和数据位众多为主要特征的光电混合的 TOC 的研究^[7-9]. 随后金翊等人提出了 TOC 的 MSD 加法器原理^[10], 2011 年启动的面向应用的千位 TOC 系统 SD11 的硬件和软件设计已接近尾声. 随着新系统的推进, 其复杂程度在不断增加, 设计过程中错误和缺陷在所难免, 这些不仅影响系统的正常运行, 而且影响运行安全, 甚至导致系统失效. 因此, TOC 的可靠性已成为倍受关注的新课题.

另一方面, 虽然对光学计算机的研究已有很长历史, 但还没有得到实际应用. “全光计算机”始终是最美好的愿望. 在激光、液晶、光纤、光强放大等技术和光电材料的进展都将推进光学计算机的发展. 但光网的数据交换目前仍采用“光-电-光”方式. 在传输过程中, 存在传输损耗和数据出错的问题, 因此提高数据传输系统的性能和可靠性十分必要.

考虑到上述因素, 确保三值光学信息在传输、存

储、运算过程中的可靠性与正确性极为重要.对此已有一些研究.林榕慧^[11]对在时钟同步条件下三值光信号的异步传输和同步传输方式进行研究和设计.王岩等^[12]提出了光通信系统可靠性设计的硬件和软件方法.金翊等在 TOC 的系统监控中对液晶坏位替换策略和亮暗阈值的自动测定技术进行研究^[13,14].作者借鉴二值汉明码的编码方法和分组规则,已提出了一种三值汉明码检错纠错原理与方法.

2 三值汉明码及其扩展形式

2.1 二值汉明码与扩展汉明码

汉明码是一种线性分组码,由 R. Hamming 在 1950 年提出.目前被广泛应用于存储器、串行数据通讯等场合纠正单个错误.其原理是在传输的信息码中加入一些称为校验位的冗余码,使这些信息码与校验码之间根据某种规则建立一定的合法关系.假设信息码位数为 n 位,校验码位数为 k 位.那么校验码位数 k 可选取满足下列不等式的最小整数

$$2^k \geq k + n + 1$$

设有 n 位信息码为 $M = a_n a_{n-1} \cdots a_5 a_4 a_3 a_2 a_1$.将校验位 b_i 分别置在 2^i 码位上,得到长度为 $n + k$ 的二进制序列 $H = a_n a_{n-1} \cdots a_5 b_4 a_4 a_3 a_2 b_3 a_1 b_2 b_1$,其中 b_i 是通过与信息位分组后进行计算得到的.这种码组称为 $(n + k, n)$ 码.可是这种汉明码只能纠正单个错误或检测

两个错误.

为使系统同时具有一位纠错和二位检错能力,在汉明码基础上再增加一个总校验位 b_0 ,形成 $(n + k + 1, n)$ 码,称为扩展汉明码,仍记为 $H = a_n a_{n-1} \cdots a_5 b_4 a_4 a_3 a_2 b_3 a_1 b_2 b_1 b_0$.校验时对一般校验位 $b_i (i \neq 0)$ 的分组与汉明码相同,但总校验位 b_0 是所有信息位与普通校验位的和,用于监控这些位的错误.设接收到的信息为 $H' = a'_n a'_{n-1} \cdots a'_5 b'_4 a'_4 a'_3 a'_2 b'_3 a'_1 b'_2 b'_1 b'_0$.其校验过程就是通过对接收到的信息位 $a'_n a'_{n-1} \cdots a'_5 a'_4 a'_3 a'_2 a'_1$ 采用同样的分组方法,产生本地校验位 $c_1, c_2, c_3, \dots, c_k$ 和总校验位 c_0 ,然后通过 $S'_i = c_i \oplus b'_i, i = 0, 1, 2, \dots, k$ 计算出校验结果 S'_i .根据 $S'_k \cdots S'_2 S'_1 S'_0$ 的取值判定信息位与校验位是否有错;在有错的情况下进行纠一检二处理.

2.2 三值汉明码

考虑各位由数位 0, 1 或 $\bar{1}$ 构成的 n 位 MSD 数表示的三值信息码 $M = a_n a_{n-1} \cdots a_5 a_4 a_3 a_2 a_1$,其中 $\bar{1}$ 表示 -1 .

三值汉明码仍由信息位和校验位两部分构成.假设信息码 $M = a_n a_{n-1} \cdots a_5 a_4 a_3 a_2 a_1$, k 个校验位分别放置在 2^i 码位上,得到的码简称三值 $(n + k, n)$ 汉明码.校验码位数 k 是满足下列不等式的最小整数: $2^k \geq k + n + 1$.三值 $(n + k, n)$ 汉明码构成与校验分组如表 1 所示.

表 1 三值汉明码信息位与校验位分组表

码位	$n + k$...	2^i	...	9	8	7	6	5	4	3	2	1
汉明码	a_n	...	b_i	...	a_5	b_4	a_4	a_3	a_2	b_3	a_1	b_2	b_1
分组													
S_1	y	a_5		a_4		a_2		a_1		b_1
S_2	y			a_4	a_3			a_1	b_2	
S_3	y			a_4	a_3	a_2	b_3			
S_4	y	a_5	b_4							
...										
S_i	y	...	b_i										
...											

表 1 中,第 $n + k$ 位处下面所列 y 可能是 a_n 或空.校验位 $b_1, b_2, b_3, b_4, \dots, b_k$ 的计算是由表 2 给出的运算“ \oplus ”采用与二进制汉明码类似的计算方式获得的.为实施校验和纠错,引入如表 3 所示的运算“ \otimes ”.

表 2 \oplus 的运算规则

\oplus	0	1	$\bar{1}$
0	0	1	$\bar{1}$
1	1	$\bar{1}$	0
$\bar{1}$	$\bar{1}$	0	1

表 3 \otimes 的运算规则

\otimes	0	1	$\bar{1}$
0	0	$\bar{1}$	1
1	1	0	$\bar{1}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	1	0

汉明码 H 经传输后变为 $H' = a'_n a'_{n-1} \cdots a'_5 b'_4 a'_4 a'_3 a'_2 b'_3 a'_1 b'_2 b'_1$.校验过程就是通过对接收到的信息位 $M' = a'_n a'_{n-1} \cdots a'_5 a'_4 a'_3 a'_2 a'_1$ 再分组编码产生本地校验位 $c_k, \dots, c_4, c_3, c_2, c_1$,然后再与接收

到的校验码 $b'_k \cdots b'_4 b'_3 b'_2 b'_1$ 的对应位进行 \otimes 运算,即计算 $S'_i = c_i \otimes b'_i$ (模 3 减法). 最后根据 $S'_k \cdots S'_4 S'_3 S'_2 S'_1$ 的取值判定是否有一位错以及在一位错情况下进行纠错. 但这种方法无法检测到二位错误. 相关研究工作的详细介绍已投有关刊物.

2.3 扩展三值汉明码

本节将给出扩展三值汉明码的一种形式. 在 $n+k$ 位三值汉明码的基础上再增加两个扩展校验位 b_0, b_e . 扩展校验位可放在三值汉明码的前边, 也可在后边. 为了方便, 这里把 b_0 放在三值汉明码的右边, b_e 放在三值汉明码的左边, 得到的码简称扩展三值 $(n+k+2, n)$ 汉明码, 其分组过程见表 4.

表 4 校验分组过程

码位	e	$n+k$	\cdots	2^i	\cdots	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
扩展汉明码	b_e	a_n	\cdots	b_i	\cdots	a_5	b_4	a_4	a_3	a_2	b_3	a_1	b_2	b_1	b_0
分组															
S_0		a_n	\cdots			a_5		a_4	a_3	a_2		a_1			b_0
S_1		y	\cdots		\cdots	a_5		a_4		a_2		a_1		b_1	
S_2		y	\cdots		\cdots			a_4	a_3			a_1	b_2		
S_3		y	\cdots		\cdots			a_4	a_3	a_2	b_3				
S_4		y	\cdots		\cdots	a_5	b_4								
\cdots		\cdots	\cdots		\cdots										
S_i		y	\cdots	b_i											
\cdots		\cdots	\cdots												
S_e	b_e		\cdots	b_i	\cdots		b_4				b_3		b_2	b_1	

以下以 8 位信息码为例, 对扩展三值汉明码的构成以及校验位生成计算进行说明. 扩展三值 $(14, 8)$ 汉明码的构成如表 5 所示.

表 5 扩展三值 $(14, 8)$ 汉明码的构成表

码位	e	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
扩展汉明码	b_e	a_8	a_7	a_6	a_5	b_4	a_4	a_3	a_2	b_3	a_1	b_2	b_1	b_0
信息码		a_8	a_7	a_6	a_5		a_4	a_3	a_2		a_1			
校验码	b_e					b_4				b_3		b_2	b_1	b_0

校验分组过程如表 6 所示.

表 6 扩展三值 $(14, 8)$ 汉明码校验分组表

行	码位	e	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
0	S_0		a_8	a_7	a_6	a_5		a_4	a_3	a_2		a_1			b_0
1	S_1			a_7		a_5		a_4		a_2		a_1		b_1	
2	S_2			a_7	a_6			a_4	a_3			a_1	b_2		
3	S_3		a_8					a_4	a_3	a_2	b_3				
4	S_4		a_8	a_7	a_6	a_5	b_4								
e	S_e	b_e					b_4				b_3		b_2	b_1	

普通校验位的计算

$$b_1 = a_1 \oplus a_3 \oplus a_4 \oplus a_5 \oplus a_7$$

$$b_2 = a_1 \oplus a_2 \oplus a_4 \oplus a_6 \oplus a_7$$

$$b_3 = a_2 \oplus a_3 \oplus a_4 \oplus a_8$$

$$b_4 = a_5 \oplus a_6 \oplus a_7 \oplus a_8$$

扩展校验位的计算:

$$b_0 = a_1 \oplus a_2 \oplus a_3 \oplus a_4 \oplus a_5 \oplus a_7 \oplus a_8$$

$$b_e = b_1 \oplus b_2 \oplus b_3 \oplus b_4$$

3 扩展三值汉明码的错误分析与纠错检错原理

在校验位 $b_0, b_1, b_2, b_3, b_4, \dots, b_k, b_e$ 计算完成后, 得到扩展汉明码 H , 同时经传输后变为三值码 H' . 以下假定传输过程中至多发生二位数据错误. 对 H' 按分组方式计算诸监督位 $S'_0, S'_1, S'_2, S'_3, S'_4, \dots, S'_k, S'_e$ 值.

以下以 8 位信息位、6 位校验位为例进行说明.

设扩展三值汉明码为 $H = b_e a_8 a_7 a_6 a_5 b_4 a_4 a_3 a_2 b_3 a_1 b_2 b_1 b_0$, 经传输后变为 $H' = b'_e a'_8 a'_7 a'_6 a'_5 b'_4 a'_4 a'_3 a'_2 b'_3 a'_1 b'_2 b'_1 b'_0$.

首先按分组方式根据运算 \oplus 的计算规则计算接收端校验位新值. 为叙述方便起见, 称它们为验证位. 普通验证位 c_1, c_2, c_3, c_4 与扩展验证位 c_0, c_e 的计算如下:

$$c_1 = a'_1 \oplus a'_2 \oplus a'_4 \oplus a'_5 \oplus a'_7$$

$$c_2 = a'_1 \oplus a'_3 \oplus a'_4 \oplus a'_6 \oplus a'_7$$

$$c_3 = a'_2 \oplus a'_3 \oplus a'_4 \oplus a'_8$$

$$c_4 = a'_5 \oplus a'_6 \oplus a'_7 \oplus a'_8$$

$$c_0 = a'_1 \oplus a'_2 \oplus a'_3 \oplus a'_4 \oplus a'_5 \oplus a'_6 \oplus a'_7 \oplus a'_8$$

$$c_e = b'_1 \oplus b'_2 \oplus b'_3 \oplus b'_4$$

其次, 根据运算 \otimes 的计算规则计算监督位 $S'_1, S'_2, S'_3, S'_4, S'_0, S'_e$ 的值:

$$S'_i = c_i \otimes b'_i, i = 0, 1, 2, 3, 4, e$$

定理 1 如果 H 经传输后存在 1 位错误, H' 的监督位的值出现如表 7 所示的情况, 那么汉明码 H' 中或者第 0 位, 或者第 e 位, 或者第 $(|S'_k| \cdots |S'_4| |S'_3| |S'_2| |S'_1|)_2$ 位发生错误. 这里, $|x|$ 是通常意义下 x 的绝对值, $(y)_2$ 表示 y 的二进制表示.

表 7 监督位取值情况表 A

情况	S'_0	S'_e	正常位 S'_i	出错位置
1	$w \neq 0$	0	所有 $S'_i \neq 0$ 的都有相同值 $w \neq 0$	$(S'_k \cdots S'_4 S'_3 S'_2 S'_1)_2$
2	0	$u \neq 0$	仅一个 $S'_i = \bar{u} \neq 0$	2^i
3	$w \neq 0$	0	所有 $S'_i = 0$	0
4	0	$u \neq 0$	所有 $S'_i = 0$	e

证明: 为方便起见, 以下将记 $w_i = a'_i - a_i, u_j = b'_j - b_j$.

情况 1: 信息位中仅有一位数据错误. 设信息位 a_i 发生错误, a_i 所在位置 p 的二进制表示为 $(t_k t_{k-1} \cdots t_4 t_3 t_2 t_1)_2$. 从扩展汉明码的构成规则知, a_i 在分组时至少分在 3 组中 (包括第 0 组), 于是 $t_k, \dots, t_4, t_3, t_2, t_1$ 中至少有 2 个取值 1.

取任何一个使 $t_i = 1$ 的 i , 即考察分组表中第 i 行.

写 $c_i = a'_i \oplus x_i, b_i = a_i \oplus x_i$. 因 b_i 本身的值不变, 即 $b'_i = b_i$, 于是 $S'_i = c_i \otimes b'_i = c_i \otimes b_i = c_i - b_i = (a'_i \oplus x_i) - (a_i \oplus x_i) = (a'_i + x_i) - (a_i + x_i) = a'_i - a_i = w_i$; 对所有使 $t_j = 0$ 的 j , 均有 $S'_j = c_j \otimes b'_j = 0$.

现在 b_0 中含有项 a_i , 而 c_0 中除了项 a'_i 外其它项 $a'_i = a_i$, 因此可写成 $b_0 = a_i \oplus x_0, c_0 = a'_i \oplus x_0$. 因 $b'_0 = b_0$, 所以有 $S'_0 = c_0 \otimes b'_0 = c_0 \otimes b_0 = a'_i - a_i = w_i$.

最后, 因第 e 行不含 a_i , 且 $b'_e = b_e$, 所以 $b'_e = c_e = b_e, S'_e = c_e \otimes b'_e = 0$.

上面的分析表明在含 a_i 的所有行 i (至少 3 行) 中, 其 $S'_i = a'_i - a_i \neq 0$ 且都相同 (包括 $i = 0$). a_i 所在列的位置由 $(t_k t_{k-1} \cdots t_4 t_3 t_2 t_1)_2 = (|S'_k| \cdots |S'_4| |S'_3| |S'_2| |S'_1|)_2$ 确定.

情况 2: 校验位有一位错误, 但信息位中无错误. 在这种情况下诸 $a_n, a_{n-1}, \dots, a_2, a_1$ 不变, b_i 有跳变, 即 $b_i \rightarrow b'_i, b'_i \neq b_i$.

(1) 普通位 $i \neq e, 0$. 此时, $S'_i = c_i \otimes b'_i = b_i \otimes b'_i = b_i - b'_i = \bar{u}_i \neq 0$, 而对所有 $j, j \neq i, b'_j = b_j$. 对 $j \neq e$ 且 $j \neq i$, 因 $c_j = b_j$, 有 $S'_j = c_j \otimes b'_j = b_j \otimes b'_j = 0$. 特别地, $S'_0 = c_0 \otimes b'_0 = 0$. 因 b_e 中总含有项 b_i , 可写 $b_e = b_i + y_e$, 又 $c_e = b'_i + y_e$. 但 $b'_e = b_e$, 因此 $S'_e = c_e \otimes b'_e = c_e \otimes b_e = (b'_i + y_e) - (b_i + y_e) = b'_i - b_i = u_i \neq 0$. 即 S'_e 与 S'_i 符号相反.

(2) 扩展位 $i = 0$ 或 $i = e$. 有 $c_i = b_i \neq b'_i$, 那么 $S'_i = c_i \otimes b'_i = b_i \otimes b'_i = b_i - b'_i = \bar{u}_i \neq 0$, 对其他的 $j \neq i$, 均有 $c_j = b_j, S'_j = c_j \otimes b'_j = b_j \otimes b'_j = 0$.

证明完毕.

定理 2 假定汉明码 H 经传输后在 H' 中存在至多 2 位错误. 如果计算得到的监督位的值如表 8 所示的形式, 那么汉明码 H' 中可以判定存在二位错误.

表 8 监督位取值情况表 B

情况	S'_0	S'_e	正常位 S'_i
1	0	0	至少有一个 $S'_i \neq 0$
2	0	$u \neq 0$	仅有一个 $S'_i = u \neq 0$ 或至少有 2 个 $S'_i \neq 0$
3	$w \neq 0$	0	至少有 1 个 $S'_i \neq 0$
4	$w \neq 0$	$u \neq 0$	

证明: 由定理 1, 当 H' 中存在至多一个错误时, 表 8 中的情况不出现. 现在可分三种情况证明: (1) 信息位中有二位错误; (2) 信息位中有一位错误, 校验位也有一位错误; (3) 校验位有二位错误. 限于篇幅, 仅对情况 (1) 证明, 其它两个情况证明类似.

设有 2 位信息位错误. 设信息位 a_i, a_l 有错误, 即有跳变 $a_i \rightarrow a'_i, a_l \rightarrow a'_l$, 而对其它 $j, a'_j = a_j$. 设 a_i, a_l 所在位置的二进制表示分别为 $(t_k t_{k-1} \cdots t_2 t_1)_2, (l_k l_{k-1} \cdots$

$l_2 l_1)_2$.

b_0 含项 a_i, a_l 且 b_0 无变动,因此可写 $b_0 = a_l \oplus a_i \oplus y_0 = b'_0$, 同样 $c_0 = a'_l \oplus a'_i \oplus y_0$, 因此 $S'_0 = c_0 \otimes b'_0 = c_0 \otimes b_0 = (a'_l + a'_i) - (a_l + a_i) = (a'_l - a_l) + (a'_i - a_i) = w_l + w_i$.

由于 a_i, a_l 不可能在分组表 4 的所有行中同时出现,因此在某一行中它们必一个出现,一个不出现.不失一般性,假定 a_i 在第 i 行出现, a_l 不在第 i 行出现.即 $l_i \neq 0, l_i = 0$.

可写 $b_i = a_i \oplus x_i, c_i = a'_i \oplus x_i$; 但 $b'_i = b_i, S'_i = c_i \otimes b'_i = a'_i - a_i = w_i \neq 0$.

综合得,如果 $w_i = w_l$, 那么有 $S'_0 = w_i + w_l = 2w_i = \overline{w_i}, S'_i = w_i \neq 0$; 如果 $w_i \neq w_l$, 那么 $S'_0 = w_i + w_l = 0, S'_i \neq S'_0$. 这两种情况说明, $S'_i \neq S'_0$, 在信息位中有 2 位跳变. 显然, $S'_e = 0$.

4 三值扩展汉明码的纠错方法

根据上述分析,一旦判定汉明码 H' 中仅存在一位错误,那么可根据如下方法进行纠错.

情况 1: 如果监督位中仅 S'_0 (或 S'_e) 取非 0 值, 或者者 $S_i = \overline{S'_e} \neq 0, i \neq e, 0$, 那么扩展校验位 b_0 (或 b_e) 有跳变, 或 b_i 有跳变. 此时, 对 $j = 0, e, i$, 有 $b_j = c_j \neq b'_j, S'_j = c_j \otimes b'_j = b_j \otimes b'_j = b_j - b'_j \neq 0$. 根据三值二元运算表 3 中取值 1 和 $\bar{1}$ 这两种情况: (1) $0 \otimes \bar{1} = 1 \otimes 0 = \bar{1} \otimes 1 = 1$; (2) $0 \otimes 1 = 1 \otimes \bar{1} = \bar{1} \otimes 0 = \bar{1}$, 构造如下的两个纠错码表 9 和 10:

表 9 纠错码表 A

当前值	正确值
0	1
1	$\bar{1}$
$\bar{1}$	0

表 10 纠错码表 B

当前值	正确值
0	$\bar{1}$
1	0
$\bar{1}$	1

如果经计算后 $S'_j = 1$, 那么对位置 $j = 0, e, i$ 的当前值用纠错码表 A 进行校验; 否则用纠错码表 B 进行校验. 情况 2: 如果 $S'_e = 0$ 但 $S'_0 = w \neq 0, S'_1, S'_2, S'_3, S'_4, \dots$ 中不等于 0 的值均取 w 而且至少有两个, 那么 $(|S'_k| \dots |S'_4| |S'_3| |S'_2| |S'_1|)_2$ 处的信息位 a_i 有跳变 $a_i \rightarrow a'_i$, 此时设 a'_i 为当前值, a_i 为原值 (正确值). 如果值 $w = 1$, 那么用纠错码表 B 纠错, 否则用纠错码表 A 进行纠错.

5 扩展三值汉明码的检错纠错实例

例 1: 设三值信息码为 $M = 1 \bar{1} 0 1 0 \bar{1} 1 0$, 其相应的 14 位扩展汉明码为 $H = 11 \bar{1} 0 1 1 0 \bar{1} 1 1 0 1 1 1$. 假设由于某种原因需要传输的数据变为 $H' = 11 \bar{1} 0 1 1 0 1 1 0 1 1 1$. 经计算得 $c_e = 1, c_4 = 1, c_3 = 0, c_2 = 0, c_1 = 1, c_0 = 0$. 但此时 $b'_e = 1, b'_4 = 1, b'_3 = 1, b'_2 = 1, b'_1 = 1, b'_0 = 1$, 从而由 $S'_i = c_i \otimes b'_i$ 得 $S'_e = 0, S'_4 = 0, S'_3 = \bar{1}, S'_2 = \bar{1}, S'_1 = 0, S'_0 = \bar{1}$. 由此根据定理 1 知在 $(|S'_4| |S'_3| |S'_2| |S'_1|)_2 = (0110)_2$ 位, 即第 6 位上发生错误. 由于诸 S'_i 中非 0 者均取 $\bar{1}$, 因此用纠错码表 A 进行校验. 第 6 位当前值为 1, 因此原正确值为 $\bar{1}$. 修改此位, 错误位得到纠正.

例 2: 设三值信息码为 $M = 1 \bar{1} 0 1 0 \bar{1} 1 0$, 其相应的 14 位扩展汉明码为 $H = 11 \bar{1} 0 1 1 0 \bar{1} 1 1 0 1 1 1$. 设传输后数据中变为 $H' = 11 1 0 1 1 0 \bar{1} 1 1 0 \bar{1} 1 1$, 经计算得 $c_e = \bar{1}, c_4 = 0, c_3 = 1, c_2 = 0, c_1 = 0, c_0 = 0$. 但此时 $b'_e = 1, b'_4 = 1, b'_3 = 1, b'_2 = \bar{1}, b'_1 = 1, b'_0 = 1$, 计算得 $S'_e = 1, S'_4 = \bar{1}, S'_3 = 0, S'_2 = 1, S'_1 = \bar{1}, S'_0 = \bar{1}$. 根据定理 2 知, 当前汉明码中有 2 位发生错误.

6 扩展三值汉明码的纠错检错概念结构图

以下以 8 位信息位为例给出三值 (14, 8) 扩展汉明码的纠错过程. 三值扩展汉明码检错纠错概念结构图如图 1 所示, 包括光源, 编码器, 校验位生成器, 汉明码接收器, 验证位生成器, 监督位生成器与纠错部件等.

其基本工作流程是: 光源发出的自然光射入编码器; 编码器在通过 8 位数据输入线送来的编码信号控制下, 把自然光调制成表示用户输入运算数据的三态光信号 $a_8 a_7 a_6 a_5 a_4 a_3 a_2 a_1$; 这些三态光信号经校验位生成运算部件的处理 (计算) 后输出相应的校验码位结果光信号 $b_e b_4 b_3 b_2 b_1 b_0$, 得到 14 位汉明码 $b_e a_8 a_7 a_6 a_5 a_4 a_3 a_2 b_3 a_1 b_2 b_1 b_0$; 然后将这 14 位汉明码通过光传输网络传送到 (远程) 汉明码接收器. 经过汉明码的验证位生成器生成验证位 $c_e c_4 c_3 c_2 c_1 c_0$, 再经监督码生成器生成监督码信息 $S'_e S'_4 S'_3 S'_2 S'_1 S'_0$, 通过检错纠错部件确定错误的位数. 在出现一位错的情况下, 判定出错的位置; 在有一位错时, 通过检错纠错部件进行纠错, 输出正确信息.

校验位生成器, 验证位生成器与监督位生成器以及检错纠错等三值光学部件的设计, 在技术层面已不成问题. 扩展三值汉明码的纠错检错过程主要涉及校验位、验证位以及监督位的计算, 利用三步式 MSD 加法器计算^[10], 可以并行地计算所有 $k+2$ 个校验位 $b_0, b_1, b_2, b_3, b_4, \dots, b_k, b_e$, 由于每个至多是 $n+k+1$ 个一位数的和, 采用二叉迭代加法模式, 在 $3 \log(n+k+1)$ 个

时钟周期内就可以一次完成这 $k+2$ 个数的计算. 对验证位计算也只需 $3\log(n+k+1)$ 个时钟周期, 而监督位

计算仅需几个时钟周期, 最后 $k+2$ 个监督位的位统计仅需一次扫描即可完成.

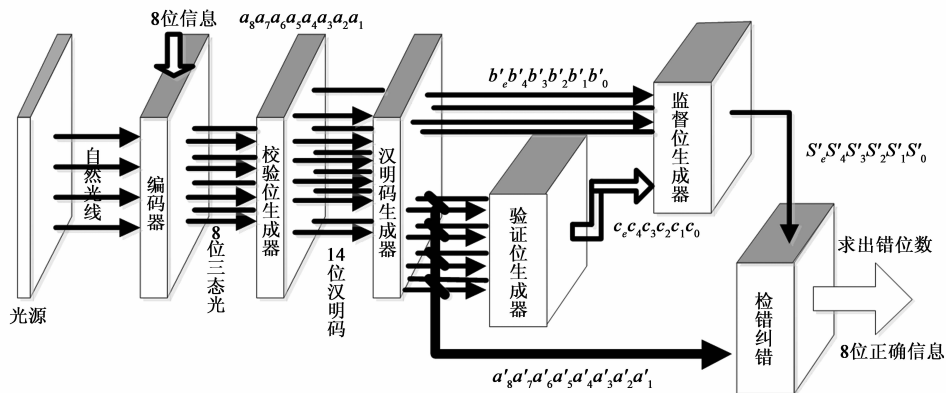


图1 三值(14, 8)汉明码纠错检错概念结构图

7 结论

三值光学计算机系统的可靠性是系统设计过程中必不可少的一个指标. 随着千位三值光学计算机系统研究的推进, 确保三值光学计算机系统的正确性和可靠性, 已成为三值光学计算机理论和设计中的重要问题. 本文在已有三值汉明码一位检错纠错研究的基础上, 开展了基于 MSD 表示的扩展三值汉明码的检错纠错的研究, 提出了一位纠错和二位检错原理以及方法, 讨论了一位错误位置的确定和纠错技术, 提出的基于三值光学计算机的三值扩展汉明码检错纠错概念结构图, 经过分析是可行的, 对三值汉明码的检错纠错设计提供了理论依据.

根据目前的研究和光学设计技术, 我们下一步的研究将集中于基于三值光学计算机的三值汉明码一位纠错二位检错实现上.

致谢 感谢金翊教授, 彭俊杰副教授, 刘学民老师和研究室所有博士和硕士研究生在本文写作中所给予的帮助和有益的讨论.

参考文献

- [1] A Avizienis. Signed digit number representation for fast parallel arithmetic[J]. IEEE Transactions on Electronic Computers EC, 1961, 10(3): 389 - 400.
- [2] B L Drake, R P Bocker, M E Lasher, R H Patterson, W J Miceli. Photonic computing using the modified signed-digit number representation[J]. Optical Engineering, 1986, 25(1): 38 - 43.
- [3] D Casasent, P Woodford. Symbolic substitution modified signed-digit optical adder[J]. Appl Opt 1994, 33: 1498 - 1506
- [4] Wang Ying, Zhang Xinliang, Huang Dexiu. All-optical NOT and XOR logic operation at 2.5Gb/s based on semiconductor

optical amplifier loop mirror[J]. Chinese Physics, 2004, 13(6): 882 - 886

- [5] Naoki Nishimura, Yasuhiro Awatsuji, Toshihiro Kubota. Performance comparison and evaluation of options for arranging data in digital optical parallel computing[J]. The Optical Society of Japan, 2003, 4(6): 523 - 533.
- [6] 金翊. 走近光学计算机[J]. 上海大学学报(自然科学版), 2011, 17(4): 401 - 411.
JIN Yi. Draw near optical computer[J]. Journal of Shanghai University(Natural Science Edition), 2011, 17(4): 401 - 411. (in Chinese)
- [7] Jin Yi, He Huacan, Lü Yangtian. Ternary optical computer principle[J]. Science in China(Series F), 2003, 46(2): 145 - 150.
- [8] Yan Junyong, Jin Yi, Zuo Kaizhong. Decrease-radix design principle for carrying/borrowing free multi-valued and application in ternary optical computer[J]. Science in China(Series F), 2008, 51(10): 1415 - 1426.
- [9] 金翊, 欧阳山, 宋凯, 沈云付, 彭俊杰, 刘学民. 三值光学计算机的数据位管理技术与理论[J]. 中国科学: 信息科学, 2013, 43(3): 361 - 373.
Jin Yi, Ouyang Shan, Song Kai, Shen Yunfu, Peng Junjie, Liu Xuemin. Management of many data bits in ternary optical computer[J]. Scientia Sinica Informationis, 2013, 43(3): 361 - 373. (in Chinese)
- [10] Jin Yi, Shen Yunfu, et al. Principles and construction of MSD adder in ternary optical computer[J]. Science China Information Sciences, 2010, 53(11): 2159 - 2168.
- [11] 林榕慧. 三值光纤通信原理研究及电路设计[D]. 西北工业大学, 2003.
Lin Ronghui. The research of ternary optical fibre communication principle and the design of digital circuit system[D]. Northwestern Polytechnical University, 2003.
- [12] 王岩, 杨奇峰, 贾琪, 郑燕红. 空间光通信系统可靠性设计与实现[J]. 微电子学与计算机, 2010, 27(9): 12 - 15.

Wang Yan, Yang Qifeng, Jia Qi, Zheng Yanhong. Reliability design and realization of the optical communication system [J]. *Microelectronics & Computer*, 2010, 27(9): 12 – 15. (in Chinese)

- [13] 雷镭, 金翊, 三值光学计算机解码器亮度阈值自动测定技术[J]. *计算机工程与设计*, 2012, 33(1): 233 – 237.

Lei Lei, Jin Yi. Auto-measurement of grayscale threshold of ternary optical computer's decoder[J]. *Computer Engineering and Design*, 2012, 33(1): 233 – 237. (in Chinese)

- [14] 金翊, 顾莹莹, 左开中. 三值光学计算机解码器的理论、技术和实现[J]. *中国科学: 信息科学*, 2013, 43(2): 275 – 286.

Ji Yi, Gu Yingying, Zuo Kaizhong. Theory, technology and achievement of TOC's decoder[J]. *Scientia Sinica Informaticis*, 2013, 43(2): 275 – 286. (in Chinese)

作者简介



沈云付 男, 1960 年生于浙江平湖市. 1996 年在北京师范大学获得博士学位. 目前工作于上海大学, 副教授. 研究方向为软硬件形式化方法, 模型检查和可靠性, 三值光学计算机可靠性等.
E-mail: yfshen@mail.shu.edu.cn



潘 磊 男, 1988 年生于安徽马鞍山. 硕士研究生, 研究方向为三值光学计算机的可靠性.